

# PROCESOS ALEATORIOS DE RIEMANN Y WEIERSTRASS

**Francisco Javier Almaguer Martínez**  
**Homero de la Fuente García**

UANL-FCFM

Universidad Autónoma de Nuevo León  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México

## Resumen:

En este trabajo se presentan algunas de las propiedades de la caminata aleatoria de Riemann y los resultados numéricos-visuales de su implementación en lenguaje de programación R. La caminata de Riemann es una extensión simple de la distribución Zipf, empleada originalmente en la clasificación y descripción estadística de la frecuencia del uso de las palabras en un idioma. Al revisar trozos de textos, Zipf encontró que la frecuencia relativa  $f$  de las palabras en diversos manuscritos, en muchos idiomas, sigue aproximadamente una ley de potencias del tipo  $f(k)=k^{-(1+\alpha)}$ ; donde  $k = 1, 2, \dots$ , con  $\alpha > 0$  parámetro característico de cada idioma. Un valor específico de  $k$  representa la posición jerárquica de una determinada palabra en un idioma particular; esto es, la posición 1 corresponde a la palabra más utilizada, la posición 2 a la segunda más utilizada y así sucesivamente. Existe un *límite* asintótico donde las propiedades de la caminata de Riemann son muy parecidas a las de la caminata de Weierstrass; esta última, un proceso aleatorio de importancia en el estudio de sistemas que poseen dinámicas de difusión anómalas y transiciones de fase orden-desorden.

**Palabras claves:** Distribución Zipf, función  $\zeta$  de Riemann, caminata de Weierstrass, ley de potencias, número armónico, difusión anómala

## Introducción

La distribución Zipf, conocida también como ley de Zipf [1], aparece en el análisis de las frecuencias de las palabras en muchos lenguajes. Establece que la frecuencia relativa  $N_k$  con la que se presenta una palabra en un texto, en un idioma determinado, sigue una ley de potencias de la forma  $N_k \sim k^{-(1+\alpha)}$ , siendo  $k$  la posición jerárquica de la palabra en el idioma en cuestión, es decir,  $k = 1$  representa la palabra más usada,  $k = 2$  la segunda más empleada y así sucesivamente. En un contexto más general, si se permite que  $k$  pueda tomar cualquier valor entero entonces es posible definir una caminata de Riemann. La distribución de Riemann asociada a esa caminata debe su nombre al hecho de que la constante de normalización es el inverso de la función zeta de Riemann  $\zeta(s)$ , con  $s > 1$ . Cuando se considera el dominio de la función zeta como el subconjunto de los números complejos  $\{w = a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ , con  $\text{Re}(w) = 1/2$ , aparece una relación que, se rumora entre los matemáticos de todo el mundo, tiene que ver con la manera en la cual se distribuyen los números primos [2].

En el presente artículo se establece la distribución de probabilidad de Riemann, la caminata aleatoria de Riemann y algunas de sus propiedades más importantes. Los resultados de las simulaciones muestran la existencia de cierta similitud entre la caminata de Riemann y la caminata de Weierstrass [2], una caminata utilizada en la modelación de difusión anómala. Se pueden usar estas caminatas aleatorias para el estudio de sistemas complejos si se logra determinar o aproximar una función que controle la varianza de estos procesos. Dicha función representaría las correlaciones entre los individuos o agentes del sistema.

## Caminata de Riemann

En esta sección se introduce la caminata de Riemann y algunas de sus propiedades más importantes.

### Distribución de Riemann

La distribución de probabilidad de Riemann es una distribución para una variable aleatoria discreta y se define para  $x \in \Omega = \mathbf{Z} - \{0\}$  como

$$P_\zeta(x) = \frac{1}{2|x|^{1+\alpha} \zeta(1+\alpha)} \quad (1)$$

donde  $\alpha$  es real  $> 1$  y la función zeta de Riemann  $\zeta(s)$  es dada por [2]

$$\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^s \quad (2)$$

La función zeta de Riemann diverge,  $\zeta(s) \rightarrow \infty$ , cuando  $(s) \rightarrow 1$  y se aproxima asintóticamente a 1,  $\zeta(s) \rightarrow 1$ , cuando  $(s) \rightarrow \infty$ .

Una *caminata aleatoria de Riemann* es un conjunto contable  $R$ , donde:  $R = \{X \mid X \text{ sigue la distribución de probabilidad de Riemann}\}$ .

Los dos primeros momentos de (1) son, respectivamente,

$$\langle X \rangle = 0 \quad (3)$$

$$\text{Var}(X) = \langle X^2 \rangle = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha+1)} \quad (4)$$

Si el espacio de probabilidad de la caminata fuera  $\Omega = \mathbf{N}$ , la función de distribución acumulada de (1) es simplemente la distribución Zipf [3]

$$F(x) = \frac{H_{x, 1+\alpha}}{\zeta(1+\alpha)} \quad (5)$$

donde  $H_{x,r}$  es el número armónico generalizado definido por

$$H_{x,r} = \sum_{j=1}^x \left(\frac{1}{j}\right)^r \quad (6)$$

Luego, para generar variables aleatorias  $x \in R$ , donde  $R = \{X \mid X \in \Omega = \mathbf{Z} - \{0\}\}$ ,  $X$  sigue una distribución de Riemann, se usa (5) para generar una variable aleatoria  $X$  que sigue una distribución como la descrita en (1), pero en el espacio  $\Omega = \mathbf{N}$ . Por otro lado, la propiedad isotrópica de la red unidimensional implica que  $P(X) = P(-X)$ ; entonces se procede a generar una variable aleatoria uniforme continua  $U_1$  en el intervalo  $(0,1)$ . Si  $U_1 < 0.5$ ,  $X_\zeta = (-X)$  y si  $U_1 > 0.5$ , entonces  $X_\zeta = X$ . Completado el procedimiento anterior  $X_\zeta$  sigue una distribución de probabilidad de Riemann en el espacio  $\Omega = \mathbf{Z} - \{0\}$ .



### Generación de números de Riemann

Dado que la función de Riemann es una serie  $p$  infinita [2] para un cierto valor  $s$ , una manera computacional de evaluar el valor de  $\zeta(s)$  es truncar la serie hasta un número  $m$  natural lo suficientemente grande de acuerdo con el poder de cómputo disponible. Una vez que se conozca el valor aproximado de  $\zeta(s)$ , se evalúa la acumulada (5) para un conjunto finito (nuevamente, lo suficientemente grande de acuerdo con el poder de cómputo disponible) de valores enteros de  $x$ , hasta algún valor máximo  $m$ .

Finalmente se genera un número aleatorio  $U$  con distribución uniforme entre  $(0,1)$  y se da un paso de tamaño  $x = k$  cuando se cumpla que  $H_{k-l, \alpha+1} < U \cdot \zeta(s) \leq H_{k, \alpha+1}$ . Para extender la caminata a todo el eje y obtener la caminata de Riemann, simplemente se genera un nuevo número aleatorio  $V$  con distribución uniforme en  $(0,1)$  y se procede a dar un salto de tamaño  $x = k$ , a la derecha si  $V > 0.5$ , o a la izquierda si  $V < 0.5$ .

La **figura 1** muestra una caminata de Riemann en el plano  $XY$ , con parámetro de truncamiento  $m = 20$ . Se usaron dos caminatas aleatorias de Riemann independientes  $\{X_t\}$  y  $\{Y_t\}$ , generando el proceso conjunto  $\{X_t, Y_t\}$ . Dicho proceso no realiza movimientos simultáneos; esto quiere decir que si  $X_t \neq 0$ , entonces  $Y_t = 0$ , y viceversa; puede imaginar una partícula que se desplaza entre los nodos de una red bidimensional.

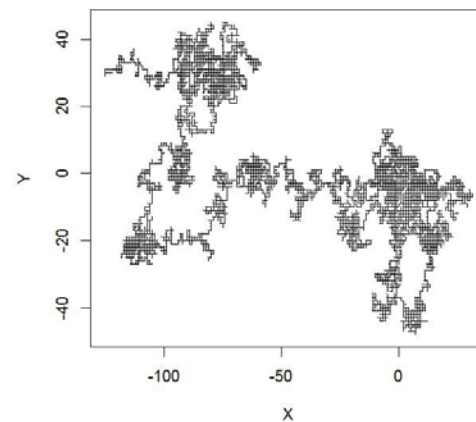
La **figura 2** muestra una caminata de Riemann en el plano  $XY$  donde  $\{X_t\}$  y  $\{Y_t\}$  son procesos independientes con varianzas infinitas.

La **figura 3** muestra una caminata de Riemann en el plano  $XY$  donde  $\{X_t\}$  y  $\{Y_t\}$  son procesos independientes, pero  $\{X_t\}$  tiene varianza infinita y  $\{Y_t\}$  tiene varianza finita.

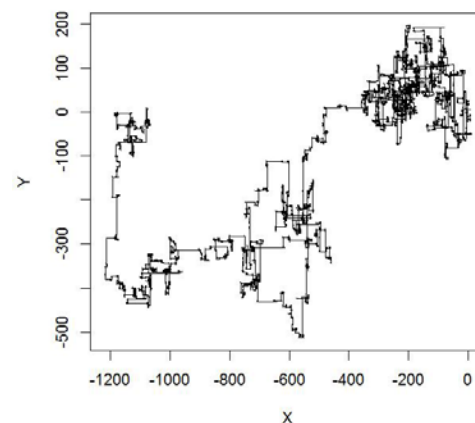
La **figura 4** muestra una caminata de Riemann en el plano  $XY$  donde  $\{X_t\}$  y  $\{Y_t\}$  son procesos independientes, pero  $\{X_t\}$  tiene varianza finita y  $\{Y_t\}$  tiene varianza infinita.

La **figura 5** muestra una caminata de Riemann en el plano  $XYZ$  donde  $\{X_t\}$ ,  $\{Y_t\}$ ,  $\{Z_t\}$ , son procesos independientes, los tres procesos tienen varianza finita.

La **figura 6** muestra una caminata de Riemann en el plano  $XYZ$  donde  $\{X_t\}$ ,  $\{Y_t\}$ ,  $\{Z_t\}$ , son procesos independientes, con varianza infinita.

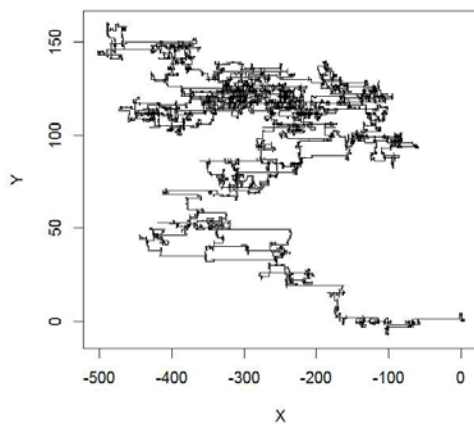


**Figura 1.** Caminata de 10,000 pasos en el plano  $XY$ , donde  $X_t, Y_t$  son variables aleatorias independientes que siguen una distribución de probabilidad de Riemann, ambas con  $\alpha = 50$  y, de acuerdo con (4), varianzas finitas.

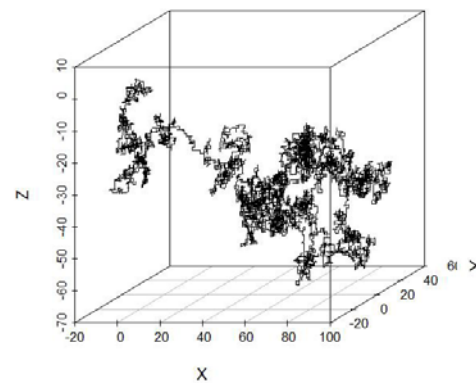


**Figura 2.** Caminata de 10,000 pasos en el plano  $XY$ , donde  $X_t, Y_t$  son variables aleatorias independientes que siguen una distribución de probabilidad de Riemann, ambas con  $\alpha = 1$ .

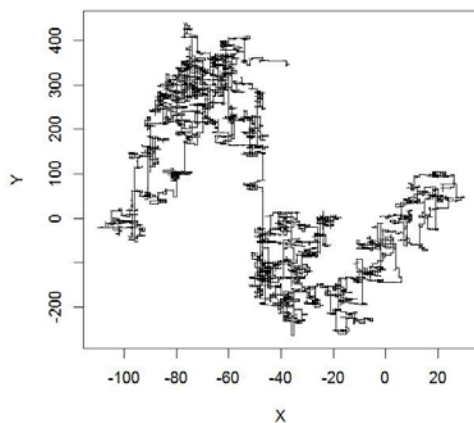
En este caso, al evaluar (4) las varianzas de  $X_t, Y_t$ , son infinitas.



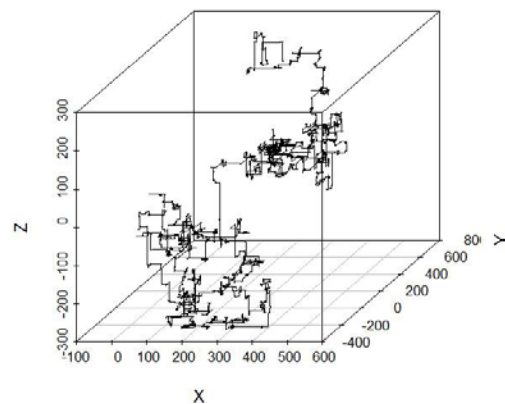
**Figura 3.** Caminata de 10,000 pasos en el plano XY, donde  $X_t, Y_t$  son variables aleatorias independientes que siguen una distribución de probabilidad de Riemann, pero  $X_t$  con  $\alpha = 1$  y  $Y_t$  con  $\alpha = 50$ . Según (4) la varianza de  $X_t$  es infinita, mientras que la varianza de  $Y_t$ , es finita.



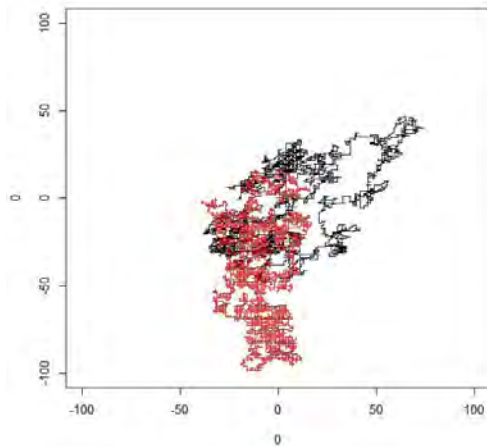
**Figura 5.** Caminata de 10,000 pasos en el plano XYZ, donde  $X_t, Y_t, Z_t$ , son variables aleatorias independientes que siguen una distribución de probabilidad de Riemann,  $X_t$  con  $\alpha = 50$ ,  $Y_t$  con  $\alpha = 50$  y  $Z_t$  con  $\alpha = 50$ . Por (4) la varianza de los tres procesos son finitas.



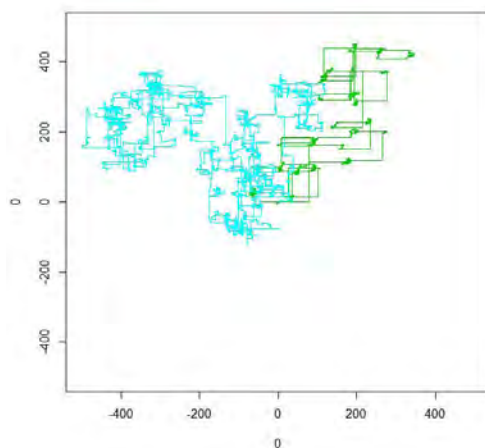
**Figura 4.** Caminata de 10,000 pasos en el plano XY, donde  $X_t, Y_t$  son variables aleatorias independientes que siguen una distribución de probabilidad de Riemann, pero  $X_t$  con  $\alpha = 50$  y  $Y_t$  con  $\alpha = 1$ . Por (4) la varianza de  $X_t$  es finita, la varianza de  $Y_t$ , es infinita.



**Figura 6.** Caminata de 10,000 pasos en el plano XYZ, donde  $X_t, Y_t, Z_t$ , son variables aleatorias independientes que siguen una distribución de probabilidad de Riemann,  $X_t$  con  $\alpha = 1$ ,  $Y_t$  con  $\alpha = 1$  y  $Z_t$  con  $\alpha = 1$ . Por (4) la varianza de  $X_t, Y_t$  y  $Z_t$  es infinita.



**Figura 7.** Una caminata de Weierstrass con  $z^2 = 100$  y  $\beta = 250$ , varianza finita; junto a una caminata de Riemann (color rojo) con  $\alpha = 50$  tanto para el proceso en  $X$  como el proceso en  $Y$ , la varianza es finita.



**Figura 8.** Una caminata de Weierstrass (color verde) con  $z^2=640$  y  $\beta=150$ , varianza infinita, junto a una caminata de Riemann (color celeste) con  $\alpha = 1$  tanto para el proceso en  $X$  como el proceso en  $Y$ , varianza infinita.

Se puede simular análogamente una caminata aleatoria de Weierstrass simétrica [4] generando números aleatorios que sigan una distribución de probabilidad de Weierstrass. En esta caminata, definida por los parámetros  $z$  y  $\beta$ , la probabilidad de dar un paso de tamaño  $L=z_j$  se define como [5]

$$P(L) = \frac{c}{\beta^j} \quad (7)$$

con  $j = 0, 1, 2, \dots$

La varianza es dada por el segundo momento, ya que, por simetría, la media es cero,  $\langle L = 0 \rangle$ ,

$$\langle L^2 \rangle = \frac{\beta - 1}{2\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{z^2}{\beta} \right)^j \quad (8)$$

donde  $\beta$  y  $z$ , son números reales mayores que 1. Si  $\beta \leq z^2$  la varianza diverge, si  $\beta > z^2$  la varianza tiene un valor finito. Una comparación de las dos caminatas en términos de comportamiento en el plano se presenta en las siguientes figuras 7 y 8. La figura 7 muestra una superposición de dos caminatas aleatorias en el plano XY, una caminata de Riemann y una caminata de Weierstrass, ambas con varianzas finitas.

La figura 8 muestra una superposición de dos caminatas aleatorias en el plano XY, una caminata de Riemann y una caminata de Weierstrass, ambas con varianzas infinitas.

Se puede notar como en la figura 7 no hay cúmulos y como en la figura 8 sí aparecen, esta es una característica particular de caminatas aleatorias con varianzas infinitas. Se dice que la caminata explora el espacio mediante una búsqueda invariante de escala o libre escala.

## Conclusiones

La obtención de números aleatorios que sigan una distribución aproximada de Riemann y Weierstrass es relativamente fácil de implementar mediante la distribución acúmulo. Es claro que cuanto mayor sea el poder de cómputo numérico disponible, el patrón aleatorio generado representara mucho mejor las distribuciones teóricas. El hecho de que ambos modelos presenten, para ciertos valores críticos de los parámetros, fluctuaciones libres de escala los vuelve atractivos para estudiar el comportamiento colectivo de sistemas complejos; donde, en determinadas situaciones, se presentan correlaciones entre los agentes a todas las escala.

## Referencias

- [1] G. Zipf, *Selective Studies and the Principle of Relative Frequency in Language*, Cambridge, Mass., USA: Harvard University Press, 1932.
- [2] Benjamin Fine, Gerhard Rosenberger, *Number theory. An Introduction via the distribution of primes*, Boston, USA, Birkhauser, 2007.
- [3] Alexander Saichev, Yannick Malevergne, Didier Sornette, *Theory of Zipf's law and beyond*, Springer, USA, 2009.
- [4] De la F. Homero, F-Javier, Almaguer, Jonas Velasco "Simulación de fluctuaciones financieras de largo alcance y transiciones de fase orden-desorden." *Congreso Internacional de Investigación, celaya.cademia.journals.com*, Vol 4. No. 3., Noviembre, 2012.
- [5] Wolfgang Paul, Jörg Baschnagel, *Stochastic Processes, From Physics to Finance*, Germany, Springer, 1999.

## Datos de los autores:

### Francisco Javier Almaguer Martínez

Efectuó estudios de Lic. en Física en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL) y un Doctorado en Ciencias con especialidad en Física en la Universidad Autónoma del Estado de Morelos (UAEM), en Cuernavaca. Actualmente es Profesor-Investigador de Tiempo Completo en la FCFM de la UANL. Es colaborador del Cuerpo Académico Sistemas Complejos: Teoría y Simulación de la FCFM. Las LGAC que cultiva son: Física Estadística de Sistemas Complejos, Teoría y Simulación de Procesos Aleatorios.

**Dirección del autor:** Pedro de Alba s/n, Cd. Universitaria, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México.

**Email:** [almagerjavier@gmail.com](mailto:almagerjavier@gmail.com),

### Homero de la Fuente García

Efectuó estudios de Lic. en Matemáticas en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Actualmente se encuentra en el CINVESTAV de la ciudad de México para iniciar estudios de Maestría en Física. Es colaborador del Cuerpo Académico. Sistemas Complejos: Teoría y Simulación de la FCFM. Las LGAC que cultiva son: Física Estadística de Sistemas Complejos, Teoría y Simulación de Procesos Aleatorios.

**Dirección del autor:** Pedro de Alba s/n, Cd. Universitaria, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México.

**Email:** [dante\\_alighieri390@hotmail.com](mailto:dante_alighieri390@hotmail.com)